

# 图象重建中的有理逼近方法

钟慧湘 王钰旋 庞云阶

(吉林大学计算机科学系, 长春 130023)

**摘要** 提出了一个由不完备投影数据重建图象的有理逼近方法. 该方法首先引入图象像素间连续的假设, 然后导出满足最优解的线性方程组, 再通过在此方程组中引入一个人工参数将其变形, 并用摄动展开方法解新形成的线性方程组, 再利用向量值函数的有理逼近来构造原线性方程组的解. 该方法还避免了原方程组直接求解计算量非常大的问题, 因为使用该有理逼近方法, 只需展开几项, 便可获得较满意的重建图象.

**关键词** 图象重建 不完全投影 有理逼近

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2000)11-0916-04

## Rational Approximation Method in Image Reconstructions

ZHONG Hui-xiang, WANG Zheng-xuan, PANG Yun-jie

(Department of Computer Science, Jilin University, Changchun 130023)

**Abstract** This paper is focused on image reconstructions from incomplete projecting data. Based on the assumption of continuity among image pixels, the linear system which the optimal solution satisfies is derived for incomplete projecting data. An artificial parameter is then introduced and a new linear system is formed from the original one. First, the new system is solved by perturbation method and the expansion coefficients are computed by an iteration; second, the solution to the original system is achieved by applying rational approximation of vector-valued function to the perturbation solution. The difficulty of the high computation amount of the direct solution of the original linear system is overcome by the proposed method. Numerical examples indicate that when only three items in the perturbation expansion are used, satisfactory approximations to the original images can be achieved by the rational approximation method.

**Keywords** Image reconstruction, Incomplete projecting data, Rational approximation

## 0 引言

图象重建是指从所获得的有关目标的投影数据中重建出原始目标的方法, 而且图象重建技术在计算机断层扫描、射电天文学、全息摄影以及微波成像等领域都有重要应用.

本文讨论的对象是离散观测系统下的离散信息, 并假设观测模型是线性的. 若设  $f_i (i=1, 2, \dots, N)$  为图象像素,  $g_j (j=1, 2, \dots, M)$  是沿第  $j$  条射线的投影数据, 则观测过程可描述为

$$Af = g \quad (1)$$

式中,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ ,  $g = (g_1, g_2, \dots, g_M)^T$ ,  $A$  是一个  $M \times N$  矩阵. 图象重建的问题就是在由观测系统所决定的线性算子  $A$  的情况下, 从  $M$  维空间观测向量  $g$  来求出  $N$  维空间的原图象  $f$ . 如果  $M \geq N$ , 则式(1)可能有解, 也可能无解; 如果  $M < N$ , 则由于观测矩阵  $A$  的零空间的存在, 使得式(1)的解不唯一, 因而这时无法唯一地从式(1)来重建原图象, 这种情况称为由不完全投影数据所进行图象重建<sup>[1]</sup>, 而本文就是讨论这种情况下的图象重建问题.

已有的图象重建的计算方法大致分为以下两类: 一类是间接法, 典型的是卷积-逆投影法; 另一类是直接法, 典型的是代数重建法. 其中, 卷积-逆投影法是

基于如下投影切片定理, 即图象函数  $f(x, y)$  可以由  $f(x, y)$  的一系列投影数据计算出来, 且这些投影是在不同的角度和位置下取得的<sup>[2,3]</sup>, 虽然此方法对于完全投影数据是一种迅速而有效的方法, 但对于视角受限的不完全投影数据来说, 由于其受限角度所对应的频谱分量未知, 因而难以得到高质量的重建图象; 而代数重建算法是基于求解式 (1) 中的线性方程组, 一般来说, 由于  $M$  和  $N$  都是很大的数, 故用伪逆求解是不现实的, 而有效的求解方法是投影迭代法, 其中代表性的算法即代数重建算法<sup>[2,3]</sup>, 而且数学上已证明, 当式 (1) 有唯一解时, 此法产生的向量序列总是收敛到该唯一解; 当其有非唯一的解时, 则向量序列也收敛到按欧氏范数离初始值最近的解. 由此可见, 对不完全投影数据, 其初始值的选取对图象重建结果有重大影响, 这是代数重建算法的不足之处.

实际上, 人们对于被重建图象总是有一定了解, 因而就有一定的先验知识, 例如, 离散图象重建问题的解, 一般应使每个像素值靠近与之相邻的像素的平均值<sup>[1,4]</sup>. 本文将基于此先验知识来进行图象重建, 即首先把图象重建问题转化为一个二次最优化问题, 进而导出满足重建图象像素值的线性方程组; 然后引进一个参数将方程组变形, 并用摄动展开法来求解新形成的方程组, 再利用向量值函数的有理逼近来求得原线性方程组的近似解. 在设计算法时, 应充分考虑到迭代求解方程组的特殊结构, 以便节约存储空间. 本文的方法程序简便, 数值实验表明, 它能够给出较好的重建图象.

### 1 问题模型

根据前一节的讨论可知, 不完全投影数据不足以唯一地重建原图象, 但根据对图象的先验了解, 假设重建图象的相邻像素之间有一定的连续性, 那么在多个可行解中, 人们希望总能得到一个图象内像素值变化最为和缓的解. 这是因为从统计特性上说, 这个解最符合上述的先验知识<sup>[1,4]</sup>. 基于此假设, 即可先构造一个能量函数

$$E(f) = \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f}_i)^2 + \sum_{j=1}^M \left| \sum_{i=1}^N a_{ij} f_i - g_j \right|^2$$

$$= f^T Q^T Q f + (A f - g)^T (A f - g) \quad (2)$$

式中

$$\bar{f}_i = \frac{1}{8} \sum_{k \in S_i} f_k \quad (3)$$

其中,  $S_i$  是第  $i$  个像素的二维 8 邻域点;  $\bar{f}_i$  是  $S_i$  上所有像素的平均值;  $Q$  是基于  $f_i - \bar{f}_i$  而导出的偏差矩阵(若记  $Q^T$  为  $Q$  的第  $i$  行, 则  $Q^T f = f_i - \bar{f}_i$ ). 假设原图象大小为  $3 \times 3$ , 投影方向为水平和垂直两个方向, 若  $N = 9, M = 6$ , 则  $A$  和  $Q$  的表达式为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

这样, 图象重建问题就转化为求式 (2) 中能量函数的最小值.

则式 (2) 中能量函数  $E(f)$  即可以写成为

$$E(f) = f^T Q^T Q f + f^T A^T A f - 2(A^T g)^T f + g^T g \quad (4)$$

从上面的方程, 可得

$$\frac{\partial E(f)}{\partial f} = 2(Q^T Q + A^T A) f - A^T g \quad (5)$$

于是, 求式 (4) 的最小值问题就转化成求解下面线性方程组

$$(Q^T Q + A^T A) f = A^T g \quad (6)$$

式中, 系数矩阵  $(Q^T Q + A^T A)$  的阶数为  $N \times N$ .

虽然式 (6) 形式上简单, 但是由于象素个数  $N$  很大, 因此直接求解的计算量非常大. 为此, 将通过在此方程组中引入一个人工参数将其变形, 并用摄动展开法求解新形成的线性方程组, 再利用向量值函数的有理逼近来构造原线性方程组的解, 以减少计算量.

### 2 有理逼近法

为了减少计算量,在求解式(6)时,需引进一个常数  $r > 0$  和一个参数  $t$ ,再考虑求解下面的方程组

$$[rI + t(Q^T Q + A^T A - rI)]f = A^T g \quad (7)$$

式中,  $t \in [0, 1]$ ,  $I$  为  $N \times N$  阶单位矩阵.注意,当  $t = 1$  时,线性方程组式(6)和式(7)是完全相同的.由于线性方程组式(7)的解依赖于  $t$ ,若设其为  $f(t)$ ,那么  $f(1)$  就是式(6)的解.

求解时,首先用摄动展开方法基于  $t = 0$  来求解式(7),然后再使用有理逼近方法,以便求得  $t = 1$  时该方程组的近似解.若让

$$f_p(t) = f_0 + tf_1 + t^2 f_2 + \dots \quad (8)$$

并将式(8)中的  $f_p(t)$  代替式(7)中的  $f$ ,并令  $t$  的各次幂的系数等于零,即得到

$$f_0 = A^T g / r \quad (9)$$

$$f_1 = f_0 - (Q^T Q + A^T A) f_0 / r \quad (10)$$

$$f_2 = f_1 - (Q^T Q + A^T A) f_1 / r \quad (11)$$

虽然当  $t$  离开  $t = 0$  较远时,式(8)中的摄动解  $f_p(t)$  可能偏离真解  $f(t)$  很远,但依参考文献[5],由于式(9)中的系数矩阵当  $0 \leq t \leq 1$  时正定,则由式(8)出发构造的向量值函数的有理逼近,于区间  $0 \leq t \leq 1$  上一致逼近真解  $f(t)$ .

接下来,我们由式(8)~式(11)来构造式(7)的解的有理逼近.为此,首先计算欧氏内积

$$b_{ij} = (f_i, f_j), i = 0, 1; j = 0, 1, 2 \quad (12)$$

如果

$$b_{00}b_{11} - b_{10}^2 = 0 \quad (13)$$

则  $f_0$  与  $f_1$  线性相关,然后可用下面的有理逼近

$$f(t) = f_0 + \frac{t}{c_0 t + 1} f_1, c_0 = -\frac{b_{01}}{b_{00}} \quad (14)$$

来逼近式(7)的解.如果

$$b_{00}b_{11} - b_{10}^2 \neq 0 \quad (15)$$

则  $f_0$  与  $f_1$  线性无关,使用有理逼近

$$f(t) = f_0 + \frac{c_1 t^2 + t}{c_0 t^2 + c_1 t + 1} f_1 + \frac{t^2}{c_0 t^2 + c_1 t + 1} f_2 \quad (16)$$

来逼近式(7)的解,式中,  $c_0$  和  $c_1$  即是下面二元一次方程组的解

$$\begin{cases} b_{00}c_0 + b_{01}c_1 = -b_{02} \\ b_{01}c_0 + b_{11}c_1 = -b_{12} \end{cases} \quad (17)$$

依据式(13)和式(15),再分别令式(14),式(16)中的  $t = 1$ ,就获得式(6)的逼近解.

上述有理逼近中涉及到的常数  $r$ ,运算时需要调整,直到满意时为止.从式(9)可知,若取  $r = l \sqrt{N}$ ,  $l$  是投影次数(例如投影方向取  $0^\circ$  和  $90^\circ$  两个方向,则  $l = 2$ ),那么  $f_0$  则相应于反投影法得到的重建图象<sup>[6]</sup>.

### 3 算法实现与例子

综上所述,可使用以下步骤来实现图象重建算法:

输入: 投影量  $g[M]$ ,重建图象的大小为  $N$ ,投影次数为  $l$ ;

输出: 重建的图象  $f[N]$ ;

步骤1 根据投影情况确定矩阵  $A[M][N]$ ,确定矩阵  $Q[N][N]$ ,  $r = l \sqrt{N}$ ;

步骤2 计算

$$f_0 = A^T g / r, f_1 = f_0 - (Q^T Q + A^T A) f_0 / r,$$

$$f_2 = f_1 - (Q^T Q + A^T A) f_1 / r$$

步骤3 计算

$$b_{ij} = (f_i, f_j), i = 0, 1; j = 0, 1, 2; s = b_{00}b_{11} - b_{10}^2$$

若  $s = 0$ , 则  $c_{00} = -\frac{b_{01}}{b_{00}}; f = f_0 + \frac{1}{c_{00} + 1} f_1$

否则,  $c_0 = \frac{(b_{01}b_{12} - b_{02}b_{11})}{s}; c_1 = \frac{(b_{01}b_{02} - b_{00}b_{12})}{s}$ ,

$$c = c_0 + c_1 + 1; f = f_0 + \frac{c_1 + 1}{c} f_1 + \frac{1}{c} f_2.$$

上述算法在具体实现时还有一些技巧:如在算法的步骤(2)中要求计算

$$(Q^T Q + A^T A)u \quad (18)$$

式中,  $u$  是  $N$  维向量.乍看起来,这好象是一个相当困难的计算任务,但实际上,式(18)的计算并不像相应大小的矩阵那样所需花费的代价.

事实上,式(18)可化为

$$(Q^T Q + A^T A)u = \sum_{i=1}^N (Q_i^T u) Q_i + \sum_{j=1}^M (A_j^T u) A_j \quad (19)$$

式中,  $Q_i^T$  和  $A_j^T$  分别表示矩阵  $Q$  和  $A$  的第  $i$  行和第  $j$  行.而由于式(19)右端的两个和式分别可以在  $N$  和  $M$  步中完成,因此只要在每一步上把一个附加项加到累加和上,则每一步的计算过程就类似于代数重建法的单步迭代,即在任意给定步上只需要用矩阵  $Q$  和  $A$  的一行,并且只有这一行的非零分量才需要使用.这样,矩阵  $Q$  和  $A$  就不需要存进计算机,而且每一次计算仅需要矩阵的一行,并且,关于这一行的所有信息都很容易计算.

另外, 由于本文方法强调了生成图象的连续性, 故当原图象有较小缺损, 或有孤立点类噪声时, 重建图象能自然地消去或降低噪声, 从而使图象质量得到改善.

以 4 幅大小是  $48 \times 48$  的水平方向梯度模型  $M1$ , 垂直方向梯度模型  $M2$ , 高斯分布模型  $M3$  及含有噪声的模型  $M4$ (图 1) 为例, 用上述方法进行重建. 重建时, 采用的投影方向分别为  $0^\circ$  和  $90^\circ$ , 射线间隔为一个象素的投影数据. 这样获得的投影数据是严重不足的, 但仍获得较好重建效果. 重建结果误差由下式确定

$$e\% = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|f_i - \tilde{f}_i|}{\tilde{f}_i} \right| \times 100\% \quad (20)$$

$\tilde{f}_i$  是原图象的第  $i$  个象素,  $f_i$  是重建图象的第  $i$  个象素,  $N = 48 \times 48$  是象素总数. 误差率  $e\%$  描述的是原图象与重建图象所有相应象素相对误差的平均值, 它是衡量整体重建效果的标准之一. 表 1 给出了重建结果的误差率. 原图象和相应的重建图象的对比见图 1. 从表 1 可见, 本文有理逼近方法的误差率很低.

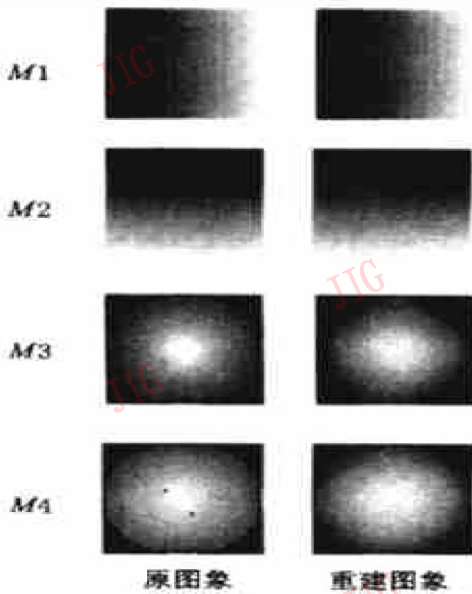


图 1 原图象与重建图象的比较

表 1 3 个重建图象的误差率 (%)

模型	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
误差	0.09	0.09	5.01	5.90

为了进一步说明误差的分布情况, 我们将图 1 中  $M3$  模型的原图象与重建图象的第 9 行按灰度值绘出, 并进行比较(见图 2). 从图 2 可以看出, 误差主要分布在图象的边缘, 这是由于本文的方法是基于图象连续性的, 因此在图象的边缘, 即连续性较差处, 会带来误差. 要消除此误差, 应考虑通过对图象施加进一步的约束来解决.

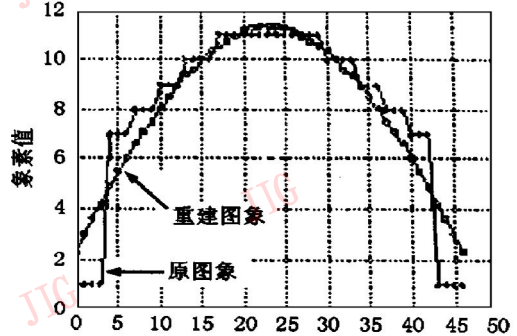


图 2 误差分布图

## 4 结 论

本文是针对不完全投影数据的图象重建而提出的一种有理逼近方法, 当图象具有较好的连续性时, 可以给出满意的重建结果.

## 参 考 文 献

- 1 孙晓安, 陈淑珍, 吴志斌等. 图象重建中的最优化方法. 中国图象图形学报, 1999, 4(A)(2): 105~ 109.
- 2 周新伦, 柳健, 刘华志. 数字图象处理. 北京: 国防工业出版社, 1986: 184~ 205.
- 3 荆仁杰, 叶秀清, 徐胜荣等. 计算机图象处理. 杭州: 浙江大学出版社, 1990: 447~ 518.
- 4 Piccolomini E L, Zama F. The conjugate gradient regularization method in Computed Tomography problems. Applied Mathematics and Computation, 1999, 102(1): 87~ 99.
- 5 Sidi A. Rational approximation from power series of vector-valued meromorphic functions, Journal of Approximation Theory, 1994, 77(1): 89~ 111.
- 6 王钰旋, 钟慧湘, 庞云阶. 计算机图象处理程序设计. 长春: 吉林大学出版社, 1999, 44~ 45.



钟慧湘 1964 年生, 硕士, 吉林大学计算机科学系副教授. 主要研究方向为计算机图形学、图象处理.

王钰旋 1945 年生, 吉林大学计算机科学系教授. 主要研究方向为计算机图形学、图象处理、计算几何.

庞云阶 1939 年生, 吉林大学计算机科学系教授, 博士生导师. 主要研究方向为计算机图形学、图象处理.